P-103

Моделирование роста фракталов с цилиндрической образующей на поверхности твёрдого тела

Д.А. Куликов[1], А.А. Потапов[2], А.Э. Рассадин[3], А. В. Степанов[4]

[1] Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 150003, Ярославль, Россия

[2]Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, 125009, Москва, Россия

[3]Нижегородское математическое общество,603950, Нижний Новгород, Россия
brat_ras@list.ru

[4]Чувашская государственная сельскохозяйственная академия,428003, Чебоксары,Россия

В докладе представлено моделирование роста фрактальных поверхностей с цилиндрической образующей на поверхности твёрдого тела. В основу математических моделей положены обобщения уравнения Кардара-Паризи-Цванга. По решениям этих уравнений вычисляется фрактальная размерность растущей поверхности, которую можно сравнить с её оценками по данным сканирующей зондовой микроскопии.

Modelling of growth of fractals with cylindrical generatrix on the surface of the solid state

D.A. Kulikov[1], A.A. Potapov[2], A.E. Rassadin[3], A.V. Stepanov[4]

[1]P.G. Demidov Yaroslavl State University, 150003, Yaroslavl, Russia

[2]Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, 125009, Moscow, Russia

[3]Nizhny Novgorod Mathematical Society, 603950, Nizhny Novgorod, Russia

[4]Chuvash State Agricultural Academy, 428003, Cheboksary,Russia

In the report modelling of growth of fractals with cylindrical generatrix on surface of solid state is presented. Corner stone of our mathematical models of this process is a number of generalizations of Kardar-Parisi-Zhang equation. Fractal dimension of growing surface is calculated in accordance with solutions of these equations. And the result one can compare with its estimations based on data of scanning probe microscopy for the surface under investigation.

В работе [1] на основе изучения изображений поверхности, полученных с помощью сканирующего зондового микроскопа производства компании NT-MDT, для целого ряда ряда образцов конструкционных материалов, подвергнутых типовым процессам физико-химической обработки, таким как микродуговое оксидирование, алмазное шлифование и. т. д., однозначно показано, что исследованные поверхности являются фрактальными.

Как правило, для моделирования процесса напыления вещества на такую поверхность применяется уравнение Кардара-Паризи-Цванга (КПЦ) [2]. Основная гипотеза, использованная при выводе этого уравнения, состоит в том, что рост поверхности происходит с постоянной скоростью строго по локальной нормали к ней [3]. Однако более реалистичным является предположение об анизотропии роста поверхности [4], что приводит к различным обобщениям уравнения КПЦ.

Для простоты в данном докладе мы ограничимся анализом роста поверхности с цилиндрической образующей. В этом случае обобщённое уравнение КПЦ имеет вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = V(\theta)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}, \quad h(x,0) = h_0(x), \qquad x \in R, \tag{1}$$

где $h(x,t)$ — высота растущей поверхности, а $V(\theta)$ — скорость её роста, зависящая от угла θ между локальной нормалью к поверхности и осью z, направленной в сторону её роста.

При этом $$V(\theta) = \int_{\theta_-(\theta)}^{\theta_+(\theta)} D(\theta') \cdot \cos(\theta - \theta') \cdot d\theta', \tag{2}$$

где $D(\theta)$ — диаграмма направленности, задающая интенсивность потока падающих на растущую поверхность частиц [4, 5], функции $\theta_{\pm}(\theta)$ учитывают эффекты затенения профиля $h(x,t)$ остальной его частью, а угол θ связан с ним соотношением [5]:

$$tg\theta = -\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{3}$$

Мы учитываем анизотропию роста поверхности путём разложения диаграммы направленности по полиномам Лежандра до третьего порядка включительно:

$$D(\theta) = D_0 + D_1 \cdot P_1(\cos\theta) + D_2 \cdot P_2(\cos\theta) + D_3 \cdot P_3(\cos\theta). \tag{4}$$

Комбинируя выражения (1)-(4), мы получим нелинейное уравнение в частных производных 1-го порядка, которое решается методом характеристик [5], причём в формулы для его решения входит не только начальный профиль $h_0(x)$, но и его производная $h_0'(x)$. Это означает, что для описания роста фрактальных поверхностей в рамках описанного выше подхода фрактальный начальный профиль надо подвергнуть некоторой регуляризации.

Например, если в качестве начального условия в (1) выбрана функция Вейерштрасса с параметрами $0 < a < 1,\ b > 1$ и $a \cdot b > 1$ [6]:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \cos(\pi \cdot b^n \cdot x), \tag{5}$$

обладающая фрактальной размерностью $d = 2 + \ln a / \ln b$, но не дифференцируемая на всей числовой оси (см. [6] и ссылки там), то для того, чтобы воспользоваться обобщённым уравнением КПЦ, необходимо заменить её усечённой функцией Вейерштрасса — N-частичной суммой функционального ряда (5):

$$W_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a^n \cdot \cos(\pi \cdot b^n \cdot x), \tag{6}$$

который равномерно приближает её с любой точностью, поскольку при любом $x \in R$:

$$|W(x) - W_N(x)| \le \frac{a^{N+1}}{1-a}. \tag{7}$$

По полученному решению $h(x,t)$ обобщённого уравнения КПЦ в каждый момент времени методами, развитыми в [6], вычисляется её фрактальная размерность $d(t)$. Степень согласия предложенной в докладе теории с экспериментом можно выяснить по данным сканирующей зондовой микроскопии.

1. А.А. Потапов, В.В. Булавкин, В.А. Герман, О.Ф. Вячеславова, *ЖТФ* **75 (5)**, 28 (2005).
2. А.Е. Китаев, А.А. Потапов, А.Э. Рассадин, *Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения* **16(1)**, 7 (2016).
3. M. Kardar, G. Parisi, Y.C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986).
4. A.L. Barabasi, H.E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press), 386 (1995).
5. С.Н. Гурбатов, О.В. Руденко, А.И. Саичев, *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике* (Физматлит), 31 (2008).
6. А.А. Потапов, Ю.В. Гуляев, С.А. Никитов, А.А. Пахомов, В.А. Герман, *Новейшие методы обработки изображений* (Физматлит), 496 (2008).